［Ｉ］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

（１） $3\sin\theta+\cos\theta=3$ が成り立っているとき $\sin 2\theta=$ $\boxed{\text{（あ）}}$ である。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

（２） ゼロでない実数 x, y が関係式 $7^{\frac{1}{x}}=9$ および $63^{\frac{1}{y}}=3$ をみたしているとき $2x-y=$ $\boxed{\text{（い）}}$ である。

（３） 空間の３点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ \sqrt{2},\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ を含む平面を L とする。

（ｉ） z 軸上の点 $\mathrm{Q}(0,\ 0,\ z)$ を通って平面 L に垂直な直線と L との交点Ｐの座標は

$$\left(\boxed{\text{（う）}},\ \boxed{\text{（え）}},\ \boxed{\text{（お）}}\right)$$

である。

（ⅱ） 線分 QP の長さは $\boxed{\text{（か）}}$ である。

（ⅲ） 点Ｐが線分 AB 上にあるとき AP：PB＝ $\boxed{\text{（き）}}$ ： $\boxed{\text{（く）}}$ である。

［II］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

2つの袋 A, B と赤玉，白玉それぞれ3個ずつが用意されている。各々の袋の中に玉が3個ずつ入っている状態に対して次の操作を考える。

操作

> 各々の袋から玉を同時に無作為に1個ずつ取り出した後，袋 A から取り出した玉を袋 B の中に，袋 B から取り出した玉を袋 A の中に入れる。

いま，袋 A の中に赤玉2個と白玉1個が，袋 B の中に赤玉1個と白玉2個が入っている状態から始め，上記の操作を繰り返し行う。また n を自然数とし，n 回目の操作を終えたときに袋 A の中に赤玉が3個入っている確率を a_n，2個だけ入っている確率を b_n，1個だけ入っている確率を c_n とする。

（1） $a_1 =$ $\boxed{\text{（あ）}}$，$b_1 =$ $\boxed{\text{（い）}}$，$c_1 =$ $\boxed{\text{（う）}}$ である。

（2） $p_n = b_n + c_n$ と定義すると p_n と p_{n+1} の間には

$$p_{n+1} = \boxed{\text{（え）}} \times p_n + \boxed{\text{（お）}}$$

という関係がある。また p_n を n の式で表すと $p_n =$ $\boxed{\text{（か）}}$ である。

（3） n 回目の操作を終えたときに袋 A の中に入っている赤玉の個数の期待値を E_n とする。E_n を n の式で表すと $E_n =$ $\boxed{\text{（き）}}$ である。

[Ⅲ]

設問（1）の文章の空欄に適切な数，式，または行列を入れて文章を完成させなさい。設問（2）の文章の空欄には選択肢（イ）～（チ）から適切な記号を選んで記入し，文章を完成させなさい。また，設問（3）に答えなさい。

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ を考える。ただし成分 a, b, c はすべて実数とする。また A と同様に $(2, 1)$ 成分がゼロである 2 次正方行列で実数を成分とするものを上三角行列とよぶことにする。

（1） $A^2=\boxed{\text{（あ）}}$，$A^3=\boxed{\text{（い）}}$ である。

一般に自然数 n に対して $A^n=\begin{pmatrix} s_n & t_n \\ u_n & v_n \end{pmatrix}$ とおくと $s_n=\boxed{\text{（う）}}$，$u_n=\boxed{\text{（え）}}$，$v_n=\boxed{\text{（お）}}$ である。また $a=c$ のときは $t_n=n\times\boxed{\text{（か）}}$，$a\neq c$ のときは $t_n=\dfrac{\boxed{\text{（き）}}}{a-c}$ と書くことができる。

（2） $X^3=A$ をみたす上三角行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ が存在しないための必要十分条件は $\boxed{\text{（く）}}$，無数に存在するための必要十分条件は $\boxed{\text{（け）}}$，ただ 1 つ存在するための必要十分条件は $\boxed{\text{（こ）}}$ である。

選択肢

（イ） $b\neq 0$　（ロ） $|a|+|c|>0$　（ハ） $a+c=0$ かつ $b\neq 0$

（ニ） $a=b=c=0$　（ホ） $a\neq 0$ かつ $c\neq 0$　（ヘ） $a>0$ または $c>0$

（ト） $a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ かつ $c\neq 0$　（チ） $a=c=0$ かつ $b\neq 0$

（3） 3 次式 $f(x)=x^3+kx^2+lx+m$ において $k^2-3l<0$ ならば，任意の実数 a, b, c に対して $f(X)=A$ をみたす上三角行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ がただ 1 つ存在することを示しなさい。ただし $f(x)$ の係数 k, l, m は実数であり，また $f(X)$ は

$$f(X)=X^3+kX^2+lX+mE \quad (E \text{ は単位行列})$$

により定義される行列である。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また，設問（1）に答えなさい。

c を正の実数として，xy 平面における曲線 C を

$$x = f(y) = c\log\frac{c+\sqrt{c^2-y^2}}{y} - \sqrt{c^2-y^2} \quad (0 < y \leqq c)$$

により定める。

（1） 曲線 C の概形を描きなさい。

（2） C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$（ただし $s>0$）における C の接線 l_1 の方程式を $y=ax+b$ とするとき，a を t の式で表すと $a = \dfrac{\boxed{（あ）}}{\sqrt{c^2-t^2}}$ である。また l_1 が x 軸と交わる点を A とするとき $\mathrm{PA} = \boxed{（い）}$ である。

（3） $0<h<c$ に対して，曲線 C の $h \leqq y \leqq c$ に対する部分と，x 軸，y 軸，および直線 $x=f(h)$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させて得られる回転体の体積を $V(h)$ とする。このとき $\displaystyle\lim_{h\to+0} V(h) = \boxed{（う）}$ である。

（4） C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$（ただし $s>0$）における C の法線 l_2 の方程式を $y=\alpha x+\beta$ とする。α，β を t の関数とみなすとき

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\sqrt{c^2-t^2}} \times \boxed{（え）},\quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \times \boxed{（お）}$$

が成り立つ。次に $x>0$ を固定して $\alpha x+\beta$ を t の関数とみなして $g(t)$ とおく。t が区間 $(0,\ c)$ を動くとき，$g(t)$ は $t = \dfrac{2c}{\boxed{（か）}}$ において最大値 $\boxed{（き）}$ をとる。